Среди зоологов считается престижным работать с высшими позвоночными,
а вот с паразитами, которых в природе не меньше, никто не любит.
Так же у радиофизиков: все любят работать с информативными сигналами, но никто с шумами…
Сергей Петрович Вятчанин

1. ***Введение. Что вообще рассматриваем?***

В курсе радиофизики (общем?) мы будем рассматривать только такие шумы:

1) Гауссовы. Это значит, что если у нас много источников шумов, то все они складываются, и если их очень много, то плотность вероятности отклонения от истинного значения будет Гаусс:

2) Принимается эргодическая гипотеза-теорема. Её суть в том, что
мы можем усреднять как по времени, так и по ансамблю, получая при этом одинаковый результат.

Например, чтобы экспериментально установить вероятность выпадения на игральном кубике 6, мы можем как бросить 1 кубик 1000 раз, так и 1 раз бросить 1000 динаковых кубиков.

3) Стационарность: характеристики шума не зависят от времени.

А он и могут вообще зависеть? Да, могут. Вот пример нестационарного шума: шум с улицы (днём он громче, ночью тише). Даже днём шум с улицы нельзя назвать стационарным: то трамвай проехал, то муха пролетела, то человек окно закрыл.

2. ***Описываем шум с помощью функций времени:***

Шум можно усреднять. Например, по времени T:

$$U(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t)\,dt = \langle U(t)\rangle$$

Также можно считать т.н. автокорреляционную функцию:

$$B(\tau) \overset{def}{=} \langle U(t)\,U(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t)\,U(t-\tau)\,dt$$

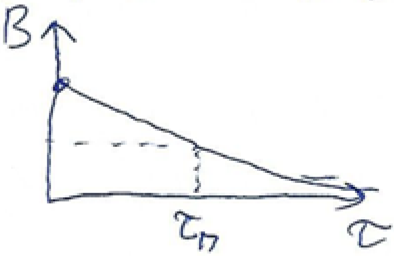
Как раз за счёт того, что шум стационарный, B(τ) зависит только от τ, но не от t.

При τ=0 B(0) – это дисперсия шума, средний квадрат отклонения. При $\tau \to \infty$ B(τ)→0, т .к. если малых τ мы можем сказать, что

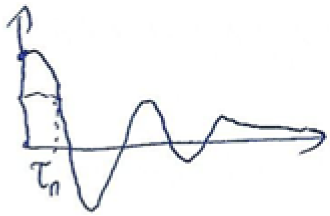
Пример из жизни. Физфаковец Вася влюбился (зря) в студентку Катю и пытается её найти. Коля сказал, что видел её в столовке на 2 этаже 5 мин назад. Петя сказал, что видел её на столах 3 этажа полчаса назад. Куда пойти Васе?

Ответ: конечно, в столовку 2 этажа! Чем меньше времени прошло, тем больше вероятность удачи. А, например, информация двухчасовой давности будет абсолютно бесполезна. Именно это и соответствует утверждению, что при $\tau \to \infty$ B(τ)→0 – нет корреляции между двумя значениями шума, между которыми прошёл слишком большой промежуток времени.

Между $\tau=0$ и $\tau=\infty$ график может вести себя по-разному. Например, так



а может так



но всегда в нуле будет ненулевое значение (дисперсия), а при $\tau \to \infty$ $B \to 0$.

3. Спектральная плотность шума

Шум можно изучать и с другой стороны: разложить его по угловым частотам ω. Только не U(t) (там будет 0), а $U^2(t)$.

Если мы фильтром вырежем всё. кроме малой полосы Δω на частоте ω, а затем усредним то, что осталось, то как раз получим т.н. спектральную плотность квадрата шума $U^2(t)$ - $\tilde{S}(\omega)$, домноженную на $2 * \frac{\Delta\omega}{2\pi}$.

$B(\tau)$ и $\tilde{S}(\omega)$ – два способа описать один и тот же шум. Они связаны друг с другом теоремой Винера-Хинчина:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \tilde{S}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = B(\tau)$$

Как вы видите, оба интеграла берутся от –бесконечности до +бесконечности. А отрицательная частота – это всегда противно. Поэтому радиофизики, особенно экспериментаторы, предпочитают работать с S(ω) (без тильды).

Поскольку$\tilde{S}(-\omega) = \tilde{S}(\omega)$, то S(ω) определяется как $S(\omega) = 2\tilde{S}(\omega)$.

Загадка от Сергея Вятчанина (на размышление даётся 30 секунд): переписать теорему Винера-Хинчина, используя S(ω) вместо $\tilde{S}(\omega)$ и чтобы все интегралы были от 0 до +бесконечности.

Решение. Перепишем сначала второе уравнение:

$$\int_{0}^{\omega} S(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = B(\tau)$$

За счёт того, что S(ω) вдвое больше $\tilde{S}(\omega)$, при интегрировании от 0 до бесконечности у нас получается тот же интеграл, что и был до этого.

Теперь перепишем первое уравнение.

$$4\int_0^{\infty} B(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = S(\omega)$$

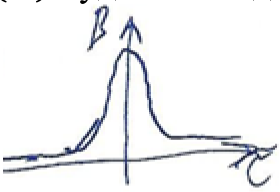
Откуда вылез коэффициент 4? Потому что нам нужно получить S(ω), а не $\tilde{S}(\omega)$ (что вдвоё больше) и ещё у нас забрали интегрирование по отрицательной части числовой прямой, уменьшило интеграл вдвое (напомню, что B(τ) есть чётная функция). За счёт этих двух факторов вылез коэффициент четвёрка.
В дальнейшем мы будем работать именно с S(ω)!

4. Разноцветные шумы
Шумы можно классифицировать по виду S(ω).
В «синем» шуме преобладают частоты, соответствующие синему цвету.
В «красном» шуме – частоты с красным цветом и т.д.
Рекомендую посмотреть небольшой 30секундный отрывок на эту тему отсюда https://www.youtube.com/watch?v=T_bTCD81inc с 4:54.

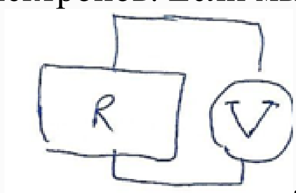
В белом шуме $S(\omega) = S_0$ - константа.
По т. Винера-Хинчина можно получить, что $B(\tau)$ будет $S_0 * б(\tau)$ - дельта-функция.

Важно помнить, что белый шум – теорабстракция, в реальности он не достижим. На практике $S(\omega)$ будет выглядеть так:

А $B(\tau)$ так:



Как шумы получаются на практике? Рассмотрим сначала тепловой шум. Он возникает из-за хаотического теплового движения электронов. Если мы возьмём резистор и подключим к его концам очень точный вольтметр



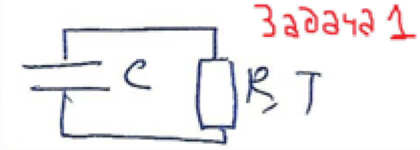
, то его показания будут чуть-чуть колебаться - а на сколько (в среднем)? Ответ мы скоро узнаем.
С достаточно большой точностью такой тепловой шум можно считать белым. Время памяти в случае металлов будет порядка 10^{-12} сек (что очень мало). Спектральную плотность S) можно считать константой (как и положено белому шуму), равной

$$\boxed{S = 4kTR = 4\theta R \text{ (формула Найквиста!)}}$$

Очень важная формула, которую мы будем применять в задачах направо и налево.

5. Хорош базарить теорией – где задачи?
К ним мы и переходим. Существует целый класс задач с нагретыми резисторами.

Задача 1:



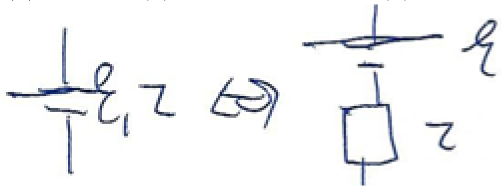
Вот в такой цепи с изначально незаряженным конденсатором тока бы не было, но из-за тепловых флуктуаций в резисторе конденсатор то заряжается, то разряжается. Что будет, если мы применим Фурье к квадрату напряжения (выходного) на конденсаторе?

Входные и выходные напряжения связаны так: $U_{\text{вых}}(\omega) = K(\omega)U_{\text{вх}}(\omega)$
Тогда входные и выходные $S(\omega)$ связаны так: $S_{\text{вых}}(\omega) = |K^2(\omega)|S_{\text{вх}}(\omega)$
$S_{\text{вх}}$ у нас $4kTR$ и не зависит от ω (т.к. это белый шум), а вот $S_{\text{вых}}$ зависит. Подставляем и получаем

$$S_{\text{вых}}(\omega) = \left|\underbrace{\frac{-\frac{i}{\omega C}}{R-\frac{i}{\omega C}}}_{K(\omega)}\right|^2 4kTR = 4kTR\,\frac{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{4kTR}{(R\omega C)^2+1}.$$

Откуда берётся формула $S_{\text{вых}}(\omega) = |K^2(\omega)|S_{\text{вх}}(\omega)$ и почему там именно квадрат $|K^2(\omega)|$, а не просто |K|?
S – это дисперсия напряжения (в частности, у неё размерность $В^2$). Корень из дисперсии есть погрешность. Пусть погрешность измерения входного напряжения $\sqrt{S}$. Тогда если выходное напряжение в среднем |K| раз больше входного, то его погрешность будет $|K|*\sqrt{S}$, а дисперсия выходного напряжения – тогда будет $|K|^2*S$. Вот откуда эта формула берётся! Т.е. если |K|=2, а погрешность входного напряжения 5 мВ, то погрешность выходного будет 10мВ. Логично же. А дисперсия S – это квадрат погрешности, поэтому там |K| в квадрат возводится.
Эта формула верна для всех видов шумов – тепловых, дробовых и каких угодно. Главное, чтобы цепь была линейна.

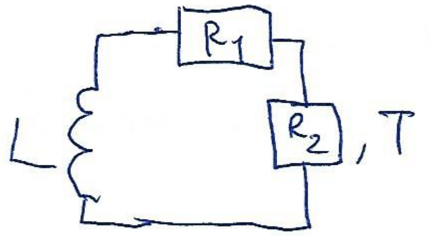
Замечание. Точно так же, как неидеальный источник напряжения можно представить в виде последовательно соединённых идеального источника напряжения и резистора



Так и нагретый резистор можно представить в виде последовательно включённых обычного резистора и источника случайного напряжения, чьей характеристикой будет не ЭДС, как мы привыкли, а $S = 4kTR = 4\theta R$.

Этот подход пригодится в задаче 2!

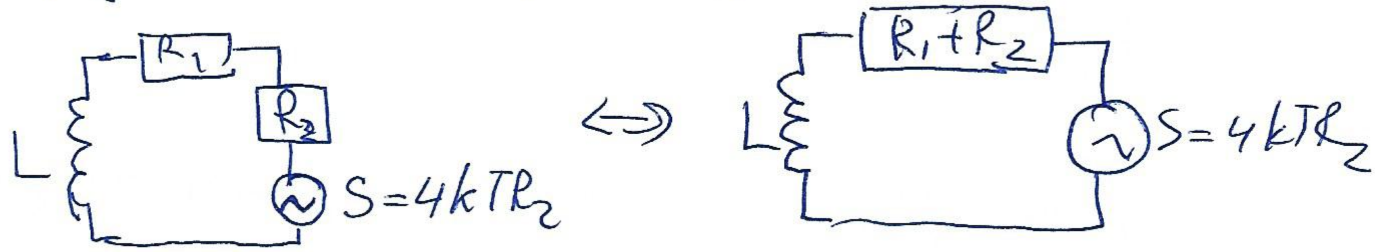
Задача 2. $S(\omega)$ на катушке?



один резистор нагрет, другой нет.

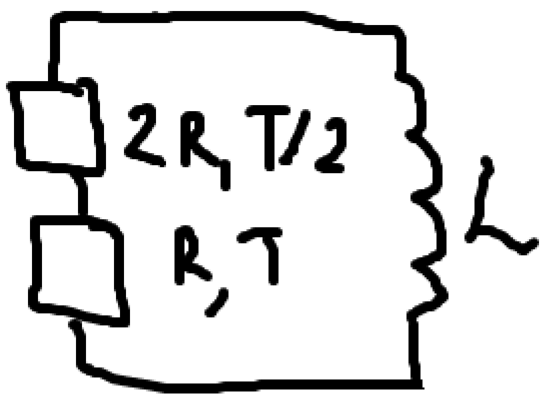
Решение:

Представляем нагретый резистор так:



$$K(\omega)=\frac{i\omega L}{i\omega L+R_1+R_2};\quad S_L(\omega)=\underbrace{\left|\frac{i\omega L}{i\omega L+R_1+R_2}\right|^2}_{K(\omega)}\cdot\underbrace{4kTR_2}_{S_{вх}}=$$

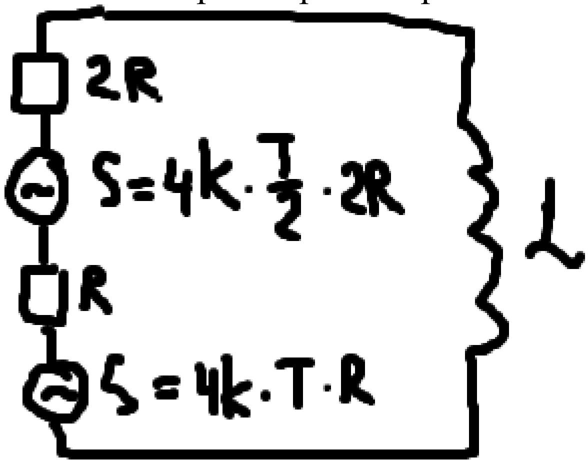
$$=\frac{\omega^2L^2\cdot 4kTR_2}{\omega^2L^2+(R_1+R_2)^2}$$



Задача 3

$S_L(\omega)$ – ?

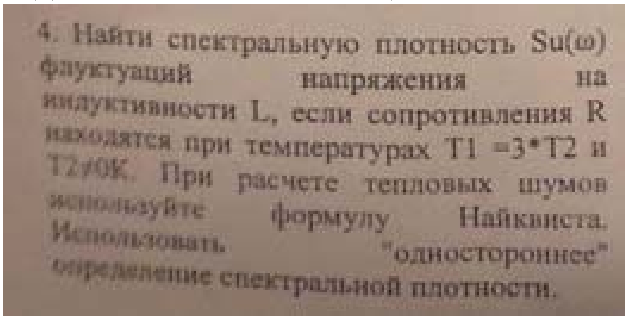
Разобьём нагретые резисторы:

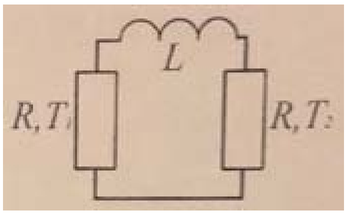


Складывать резисторы – это просто, будет 3R. А как сложить два источника случайного напряжения? От одного 4kTR, от другого 4kTR – их можно заменить одним источником случайного напряжения с S = 8kTR. Почему? Потому что шумы гауссовы, и дисперсия от двух источников равна сумме дисперсий.

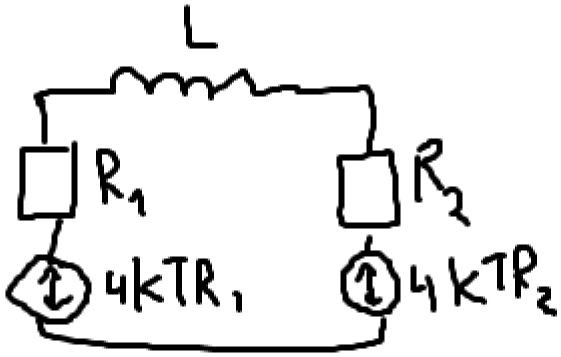
$$S_L(\omega) = |K(\omega)| \cdot 8kTR = \frac{(\omega L)^2}{9R^2 + (\omega L)^2} \cdot 8kTR$$

Задача 3а. Почти та же цепь:

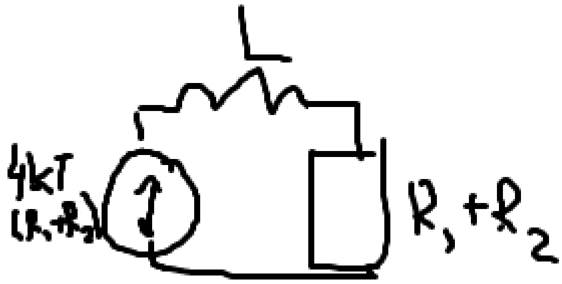

4. Найти спектральную плотность Su(ω) флуктуаций напряжения на индуктивности L, если сопротивления R находятся при температурах T1 =3*T2 и T2≠0K. При расчете тепловых шумов используйте формулу Найквиста. Использовать "одностороннее" определение спектральной плотности.



Представляем нагретые резисторы как обычные с источниками случайного напряжения:



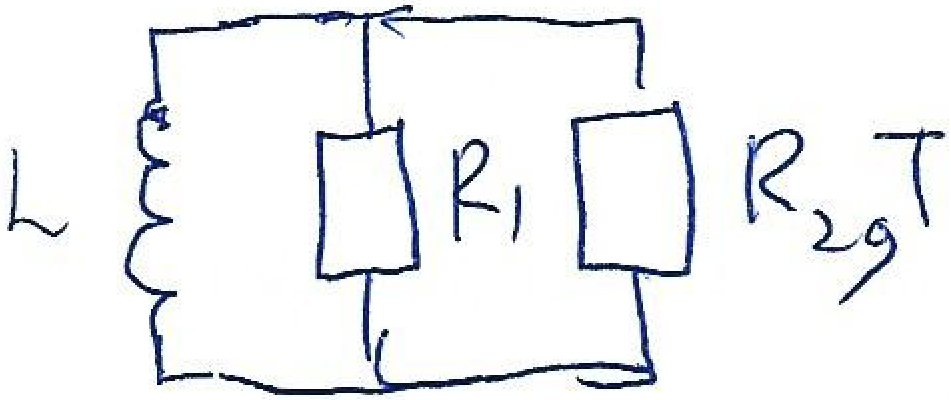
Складываем источники и сопротивления



Ответ будет

$$\frac{\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + (R_1+R_2)^2} \cdot 4kT(R_1+R_2)$$

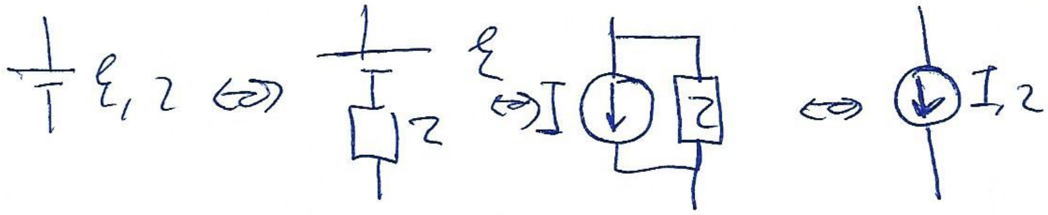
Задача 4.



Требуется найти на катушке $S_I(\omega)$, спектральную плотность квадрата ***тока***. До этого было напряжения.

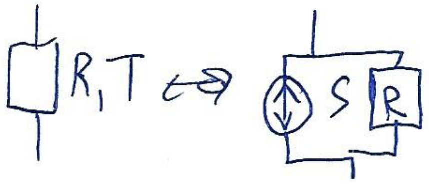
Помимо необычной постановки вопроса, резисторы подключены параллельно, а не последовательно. Это наталкивает на мысль:

Неидеальный источник напряжения мы можем представить и так: (вспомним т. об экв. источнике)



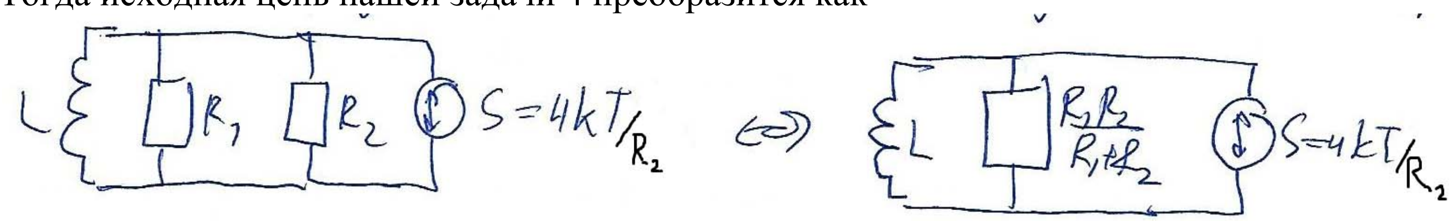
Когда источник напряжения, соединение последовательное
тока параллельное

И для нагретого резистора ∃ второе представление, через источник случайного тока



Только если хар-ка источника случайного напряжения – это спектральное разложение квадрата ***напряжения*** S=4kTR, то хар-ка источника случайного тока - это спектральное разложение квадрата ***тока*** S=4kT/R.

Тогда исходная цепь нашей задачи 4 преобразится как



Вычисляем коэффициент передачи

$$|K(\omega)|^2 = \frac{\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1+R_2)^2}}$$

И это надо домножить на спектральное разложение квадрата ***тока*** на входе 4kT/R. И тогда получим спектральное разложение квадрата ***тока*** на катушке.

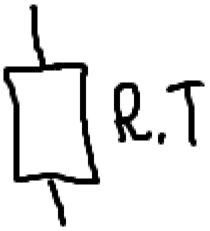
Необязательное приложение. Вывод того, что тепловой шум можно считать белым.
Рассчитаем время памяти (релаксации) в металлах.
Представим себе металлический слиток. Предположим, что там в результате тепловых флуктуаций случайно в одном месте образовался заряд. Вот такой вот получился конденсатор, площадь пластин S, расстояние между ними d.
Через какое время этот конденсатор рассосётся, т.е. напряжение на нём упадёт в е раз?

Мы знаем, что это $\sqrt{RC}$, где ёмкость S будет $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, а сопротивление R $R = \frac{\rho d}{S}$. Тогда $\sqrt{RC} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}$ - т.н. максвелловское время релаксации. Зная характерные ε и ρ для металлов, получим времена порядка 10^{-19} секунд. Это очень мало. Для волн с периодом, << 10^{-19} секунд, тепловой шум можно считать белым. А когда вы последний раз работали с волнами периодом 10^{-19} секунд (или, что то же самое, частотой 10^{19} Гц)? 10^{19} Гц – это крайне жёсткий рентген, уже на границе с гамма-излучением. Радиофизики с таким не работают ☺

Рассмотрим ещё один вид шума – дробовой.
Он связан с дискретностью носителей электрона. Если мы возьмём сечение проводника, то даже если все электроны будут двигаться равномерно с одной и той же скоростью и строго по направлению тока, то из-за того, что заряд переносится электронами, то через сечение будет за малый промежуток времени проходить разное число электронов, и как следствие, будет разная сила тока.
Из Википедии:
«Термин «дробовой шум» (а также дробовой эффект) возник в связи с тем, что благодаря ему в громкоговорителе, подключённом к выходу усилителя или радиоприёмника, появляется акустический шум, воспринимаемый ухом как напоминающий шум сыплющихся дробинок».
Спектральная плотность S(ω) квадрата ***тока*** определяется по формуле Шоттки.

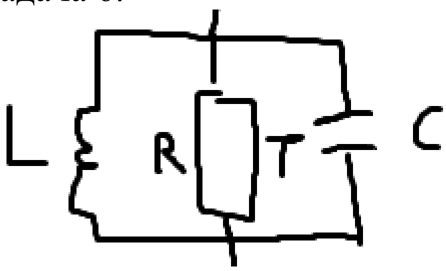
Nota bene! В Википедии вы встретите формулу $S_\omega(I) = eI_0$, где I_0 – средний ток.
Это формула на самом деле для $\tilde{S}(\omega)$, т.е. где ω меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (т.е. $\tilde{S}(\omega) = eI_0$).
Если вы работаете с S(ω), где ω меняется от 0 до$+\infty$, то вам следует использовать формулу $\tilde{S}(\omega) = 2eI_0$.

Задача 5. Дан нагретый резистор

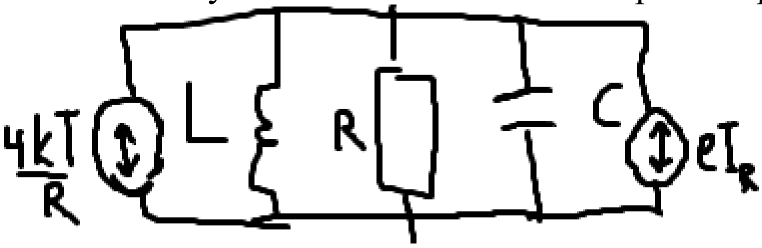


При каком приложенном к нему напряжении тепловой и дробовой шум сравняются?
Решение совсем короткое: 2e*(U/R)=4kTR=> U=4kTR^2/e.

Задача 6.



При каком внешнем напряжении тепловой и дробовой шум сравняются?
Решение. Если мы представим тепловой шум именно в виде параллельно подключённых источника случайного тока и обычного резистора, то задача решается мгновенно.

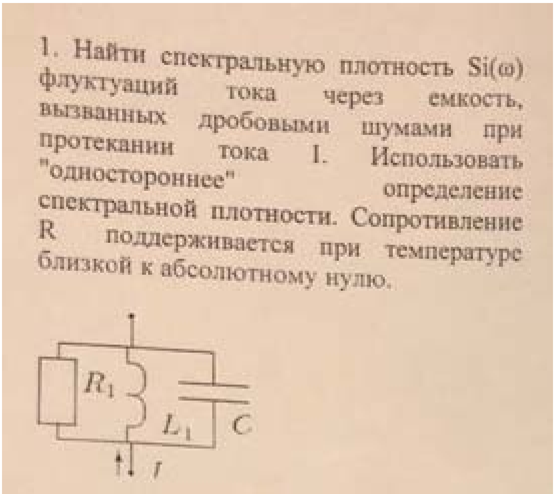


Ведь в этом случае у нас указывается два параллельно подключённых источника случайного тока. Мы просто приравниваем их спектральные плотности квадрата тока.

$$\frac{4kT}{R}=eI_R \Rightarrow \frac{4kT}{Re}=I_R R=U$$

Это и есть внешнее приложенное напряжение. А конденсатор и катушка тут вообще оказались не причём, просто чтобы нас путать ☺

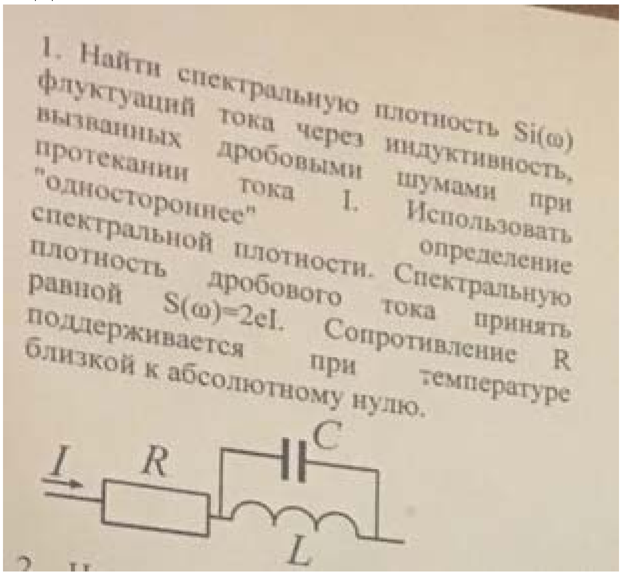
Задача 7:


1. Найти спектральную плотность Si(ω) флуктуаций тока через емкость, вызванных дробовыми шумами при протекании тока I. Использовать "одностороннее" определение спектральной плотности. Сопротивление R поддерживается при температуре близкой к абсолютному нулю.

Последняя фраза из условия исключает тепловой шум, оставляя только дробовой.

Очень легко: по формуле Шоттки спектральная плотность флуктуаций ***тока*** 2eI. Только раз мы считаем дробовой шум именно на конденсаторе, нужно найти ток именно через конденсатор. Итак, найдём ток I_C, зная ток I (см. рисунок).
Пусть напряжение на резисторе = напряжение на катушке = напряжение на конденсаторе = U. Тогда
$I_R=U/R$
$I_L=U/Z_L=U/(i\omega L)$
$I_C=U/Z_C=U*i\omega C$
$I= I_R+ I_L + I_C=U(1/R+1/(i\omega L)+ i\omega C)$
$U=I/(1/R+1/(i\omega L)+ i\omega C))$
$I_C=U*i\omega C= I*i\omega C /(1/R+1/(i\omega L)+ i\omega C))$
$S_C=2eI_C=2eI* i\omega C /(1/R+1/(i\omega L)+ i\omega C))$. Изначально я так и написал, но это неправильно. Потому что вот это страшное комплексное выражение – это комплексный коэф передачи. И он должен быть а) возведён в квадрат б) взят по модулю.
Поэтому ПРАВИЛЬНЫЙ ответ будет $S_C=2eI_C=2eI* (\omega C)^2 /(1/R^2+[1/(\omega L)+ \omega C]^2))$.

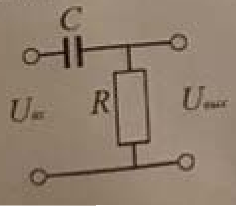
Задача 8:


1. Найти спектральную плотность $S_i(\omega)$ флуктуаций тока через индуктивность, вызванных дробовыми шумами при протекании тока I. Использовать "одностороннее" определение спектральной плотности. Спектральную плотность дробового тока принять равной $S(\omega)=2eI$. Сопротивление R поддерживается при температуре близкой к абсолютному нулю.

Нам нужно найти силу тока через катушку I_L, которую мы подставим в формулу $2eI_L$. Ищем её.
Напряжение на катушке $i\omega L*I_L$ и оно же напряжение на конденсаторе. Через него тогда пойдёт ток $i\omega L*I_L/Z_C=i^2\omega^2LC*I_L$. $I_L+I_C=I \Rightarrow I_L(1- \omega^2LC)=I \Rightarrow I_L=I/(1- \omega^2LC)$.
Домножаем на 2e, а также не забываем возвести коэффициент передачи в квадрат (он оказался в данной задаче действительным, так что по модулю его можно не брать) и получаем ответ: $2e*I/(1- \omega^2LC)^2$.

Задача 9 - на не белый шум:

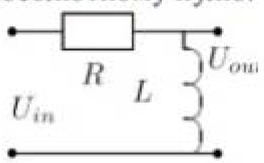
4. Найти дисперсию флуктуаций выходного напряжения для RC-цепи с омическим выходом, если на входе цепи присутствует шум со спектральной плотностью флуктуаций напряжения $S(\omega) = A/\omega^2$, A=const. Сопротивление R поддерживается при температуре близкой к абсолютному нулю.



Формула $\tilde{S}_{вых}(\omega) = |K(\omega)^2|\tilde{S}_{вх}(\omega)$ остаётся верной для любых шумов.
Комплексный коэф передачи будет R/(1-i/(ωC)), модуль его квадрата – $R^2/(1+1/(\omega C))^2$.
Домножаем на $S_{вх}(\omega)$ (равное по условию A/ω^2) и получаем ответ $A/\omega^2 * R^2/(1+1/(\omega C))^2$.

Заключительная задача 10:

1. Найти частоту, на которой спектральная плотность Su(ω) флуктуаций выходного напряжения для RL-цепи с индуктивным выходом достигает максимального значения, если на входе цепи присутствует фликкер-шум со спектральной плотностью напряжения S(ω) = A/ω, A=const. Сопротивление R поддерживается при температуре близкой к абсолютному нулю.

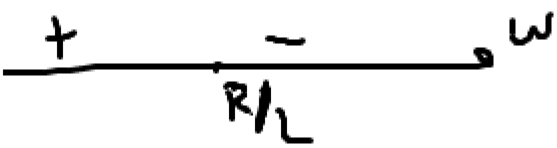


Считаем комплексный коэф передачи: $K(\omega) = \frac{i\omega L}{R+i\omega L}$.
И подрубаем привычную формулу: $S_{вых}(\omega) = |K^2(\omega)|S_{вх}(\omega)$

Где $S_{вх}(\omega)=A/\omega$, а $K(\omega) = \frac{i\omega L}{R+i\omega L}$. Получаем $\frac{A\omega L^2}{R^2+(\omega L)^2}$.
С нас, однако, спрашивают не $S_{вых}(\omega)$, а ω, при которой достигается максимум. Задача из матана-1. Просто берём производную:

$$AL^2 \cdot \frac{R^2+(\omega L)^2 - \omega \cdot 2\omega L^2}{(R^2+(\omega L)^2)^2} = AL^2 \cdot \frac{R^2-(\omega L)^2}{(R^2+(\omega L)^2)^2}$$

Расставляем знаки второй производной:



Видно, что будет один экстремум – максимум при ω=R/L. Ответ: R/L.